Filtres de Kalman

Brique ROSE

Samuel Tardieu
sam@rfc1149.net

École Nationale Supérieure des Télécommunications

Introduction

L'estimation de l'évolution d'un processus est compliquée dans un environnement bruité : les effecteurs ne sont pas fiables à 100% et les capteurs non plus. Lorsque les erreurs de mesure et d'action sont des bruits blancs dont on est capable d'estimer la covariance, il est possible de « rattraper » les erreurs de manière itérative avec les **filtres de Kalman**.

Représentation du système

Soit un processus discret x_k suivant la loi d'évolution :

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1}$$

- x_k est la grandeur caractéristique du système
- u_k représente la commande
- A et B sont des matrices représentant l'évolution souhaitée (elles sont constantes ici, mais peuvent ne pas l'etre)
- w_k est un bruit blanc indépendant de covariance Q

La mesure z_k de x_k est faite selon :

$$z_k = Hx_k + v_k$$

- H est une matrice (ici constante)
- v_k est un bruit blanc indépendant de covariance R

Exemple : chute d'un objet

- $\ddot{y}(t) = -g$
- $\dot{y}(t) = \dot{y}(t_0) - gt$
- $y(t) = y(t_0) + t\dot{y}(t_0) - gt^2/2$

En prenant une période de $t - t_0 = 1$s, on obtient :

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \dot{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g/2 \\ -g \end{bmatrix}$$

On n'a ici pas de bruit sur la réalisation.

Exemple : chute d'un objet (suite)

La mesure de la hauteur est faite toutes les secondes par un capteur imprécis avec une erreur modélisable sous forme de bruit blanc :

$$z(t) = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] x(t) + v(t)$$

$v(t)$ est un bruit blanc de covariance R (ici une matrice 1×1).

État suivant

Soient $\hat{x}_k^-$ l'estimation *a priori* du prochain état x_k, et $\hat{x}_k$ l'estimation après la mesure de cet état. Les erreurs d'estimation sont alors :

- $e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$
- $e_k = x_k - \hat{x}_k$

La covariance des erreurs est alors :

- $P_k^- = E[e_k^- {e_k^-}^T]$
- $P_k = E[e_k {e_k}^T]$

On calcule $\hat{x}_k$ à partir de l'estimation *a priori* du prochain état, de l'estimation de la mesure et de la vraie mesure :

- $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)$

K est le **gain de Kalman**.

Choix de K

Le but ici est de minimiser la covariance de l'erreur *a posteriori* P_k. En substituant e_k dans le calcul de P_k et en dérivant la trace de P_k par rapport à K pour chercher le minimum, on obtient :

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R}$$

- Plus la covariance de l'erreur de mesure R approche de zéro, plus le gain favorise le résidu (ou innovation) de la mesure $(z_k - H\hat{x}_k^-)$.
- Plus la covariance de l'erreur de l'estimation *a priori* P_k^- approche de zéro, moins le résidu de la mesure a d'importance.

Calculs pratiques

Les équations nous permettent de projeter l'état estimé et l'estimation de la covariance de $k-1$ dans k :

- $\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$
- $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$

On peut donc calculer :

- $K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$
- $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$
- $P_k = (I - K_k H)P_k^-$

On obtient donc à la fois une estimation de l'état et une estimation de la covariance de l'erreur sur l'état (la « confiance » dans l'état courant).

État initial

On choisit :

- x_0 comme étant une croyance de l'état initial
- P_0 comme dépendant de la confiance dans l'état initial (intuition)
- Q comme dépendant de l'erreur des effecteurs
- R comme dépendant du bruit du capteur (mesures précédentes ou spec)

Exemples concrets

- Balises
  - L'état peut être composé de : x, y, α, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\alpha}$
  - On peut aussi prendre : ρ, θ, $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$
- Robot en équilibre
  - L'état peut être composé de : x, y, α, γ (inclinaison), $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$
- Les filtres de Kalman sont utilisés :
  - en aéronautique (projet autopilot)
  - pour synchroniser les GPS
- Ils peuvent être étendus pour des modèles non linéaires